Ref : Algèbre et géométrie, Rombaldi (2e édition) ; p. 345.
+ Gourdon ; Analyse, p. 282.

Théorème :

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$ où $(p_n)_n$ est l'ensemble des nb premiers dans l'ordre croissant.

Démo :

Soit $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$; $\alpha > 1$; la fonction zêta de Riemann.

On muni $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

(1) • $\mathbb{P}(n) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \times \frac{1}{n^\alpha}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ forme une proba :

→ $P(n) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

→ $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1.$ donc P mesure de proba sur $\mathbb{N}^*$.

(2) • Soit $p \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$:

$$\mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{kp\}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{kp\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)} \times \frac{1}{k^\alpha p^\alpha} = \frac{1}{p^\alpha}$$

(3) • $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\Big) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*) = 1$ car c'est l'ensemble de nb qui ne sont multiple d'aucun nb premier.

donc $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\Big) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$.

(4) • $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$; $\alpha > 1$:

Soit $\forall n \geq 1$; $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)$ suite décroissante d'évènements.

Par cv décroissante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*)\right) \overset{\text{par ce qui précède (3)}}{=} \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

→ Calcul de $\mathbb{P}(A_n)$:

la famille $(p_k\mathbb{N}^*)_k$ est formée d'evn indep : Soit $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$;

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} (p_k\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}\left(\left(\prod_{k\in I} p_k\right) \mathbb{N}^*\right) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\prod_{k\in I} p_k^{\alpha}} = \prod_{k\in I} \frac{1}{p_k^{\alpha}} = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*) .$$

↳ car $\bigcap_{k\in I} (p_k\mathbb{N}^*) = \operatorname{ppcm}_{k\in I}(p_k) = \prod_{k\in I} p_k$.

Donc $(\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*)_k$ est aussi une famille indep.

et donc $\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{N}^* \setminus p_n\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n} 1 - \mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{\alpha}}\right)$.

d'où $\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_k^{\alpha}}}$.   Rq : jusque là : Rombaldi.

• $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n} = +\infty$:

→ $\zeta(\alpha) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$: $\forall \alpha > 1$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \le \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{\alpha}} \le \frac{1}{n^{\alpha}}$.

donc $\zeta(\alpha) - 1 \le \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}}_{= \frac{1}{\alpha-1}} \le \zeta(\alpha)$. donc $\frac{1}{\alpha - 1} \le \zeta(\alpha) \le \frac{1}{\alpha-1} + 1$

d'où $\zeta(\alpha) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}$.

→ on finit par l'absurde : si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$ cv.

comme $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$ alors on aurait $e^{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -\ln(1 - \frac{1}{p_n})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$ qui cv.

on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

Alors $\zeta(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_n^{\alpha}}} \le \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \ell$. $\forall \alpha > 1$.

Donc $\zeta(\alpha)$ majoré sur $]1 ; +\infty[$
or absurde car $\zeta(\alpha) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \underset{1^+}{\to} +\infty$